Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Loodrecht in de perforatie

1 maximumscore 3

- $f(x)=\dfrac{-2+2\sqrt{x+1}}{x}=\dfrac{-2+2\sqrt{x+1}}{x}\cdot\dfrac{2+2\sqrt{x+1}}{2+2\sqrt{x+1}}$ 1
- Dus $f(x)=\dfrac{-4+4(x+1)}{x(2+2\sqrt{x+1})}$ 1
- Dit geeft $\dfrac{4x}{2x(1+\sqrt{x+1})}=\dfrac{2}{1+\sqrt{x+1}}$ $(=h(x))$ (voor $x\neq 0$) 1

of

- $h(x)=\dfrac{2}{1+\sqrt{x+1}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ (voor $x\neq 0$) 1
- Dus $h(x)=\dfrac{2(1-\sqrt{x+1})}{1-x-1}$ (voor $x\neq 0$) 1
- Dit geeft $\dfrac{2-2\sqrt{x+1}}{-x}=\dfrac{-2+2\sqrt{x+1}}{x}$ $(=f(x))$ (voor $x\neq 0$) 1

of

- Als moet gelden $f(x)=h(x)$ (voor $x\neq 0$), dan moet gelden $(-2+2\sqrt{x+1})\cdot(1+\sqrt{x+1})=2x$ (voor $x\neq 0$) 1
- $(-2+2\sqrt{x+1})\cdot(1+\sqrt{x+1})=2(-1+\sqrt{x+1})\cdot(1+\sqrt{x+1})$ 1
- $2(-1+\sqrt{x+1})\cdot(1+\sqrt{x+1})=2(-1+x+1)=2x$ (dus $f(x)=h(x)$) (voor $x\neq 0$) 1

of

- Als moet gelden $f(x)=h(x)$ (voor $x\neq 0$), dan moet gelden $(-2+2\sqrt{x+1})\cdot(1+\sqrt{x+1})=2x$ (voor $x\neq 0$) 1
- $(-2+2\sqrt{x+1})\cdot(1+\sqrt{x+1})=-2-2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}+2(x+1)$ 1
- Dit is gelijk aan $2x$ (dus $f(x)=h(x)$) (voor $x\neq 0$) 1

2 **maximumscore 5**

- $h'(x) = \dfrac{-2}{(1+\sqrt{x+1})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- $h'(0) = -\frac{1}{4}$ 1
- $\dfrac{4x^2+x}{x} = 4x+1$ (voor $x \neq 0$), dus een vergelijking van k is $y = 4x+1$ 1
- $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$ (dus de grafieken van h en k staan in P loodrecht op elkaar en dus staan de grafieken van f en g in P loodrecht op elkaar) 1

Opmerking
Als de kettingregel niet of onjuist is toegepast, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.

IJsbol

3 maximumscore 4

- Voor het bolvormige ijsklontje met straal r moet gelden $\frac{4}{3}\pi r^3 = 27$ — 1
- Dit geeft $r = \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$ $(= 1{,}86...)$ (cm) — 1
- De oppervlakte van het bolvormige ijsklontje is
  $4\pi \cdot \left(\frac{81}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ (of $4\pi \cdot 1{,}86...^2$) (cm^2) — 1
- Het gevraagde quotiënt is 1,61 — 1

of

- Voor het bolvormige ijsklontje met straal r moet gelden $\frac{4}{3}\pi r^3 = 27$ — 1
- Dit geeft $r = \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$ $(= 1{,}86...)$ (cm) — 1
- $\frac{A}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r}$ — 1
- (De gevonden waarde van r invullen geeft) 1,61 — 1

4 maximumscore 5

- Het volume van het deel van de ijsbol onder het wateroppervlak is
  $\pi \int_{-1,5}^{a} \left(2{,}25 - y^2\right) \mathrm{d}y$ — 1
- Er moet gelden $\pi \int_{-1,5}^{a} \left(2{,}25 - y^2\right) \mathrm{d}y = 0{,}92 \cdot 14{,}137$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost — 2
- $a \approx 0{,}98$ dus het gevraagde antwoord is 0,52 (cm) — 1

of

- Het volume van het deel van de ijsbol boven het wateroppervlak is
  $\pi \int_{1,5-h}^{1,5} \left(2{,}25 - y^2\right) \mathrm{d}y$ — 1
- Er moet gelden $\pi \int_{1,5-h}^{1,5} \left(2{,}25 - y^2\right) \mathrm{d}y = 0{,}08 \cdot 14{,}137$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost — 2
- $h \approx 0{,}52$ (dus het gevraagde antwoord is 0,52 (cm)) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

5 **maximumscore 5**

- $r(t) = a \cdot t + 1{,}5$ (voor een constante waarde a) 1
- $V(10) = 7{,}068...$ ($= 2{,}25\pi$) (cm^3) 1
- Hieruit volgt $r(10) = \sqrt[3]{1{,}6875}$ ($= 1{,}190...$) (cm) 1
- $r(10) = 10a + 1{,}5 = 1{,}190...$ (of: $a = \frac{r(10) - r(0)}{10}$) geeft $a = -0{,}0309...$ 1
- $-0{,}0309... \cdot t + 1{,}5 = 0$ geeft $t = 48{,}47...$, dus het gevraagde antwoord is 49 (minuten) 1

of

- $r(t) = a \cdot t + 1{,}5$ (voor een constante waarde a) 1
- $V(10) = 7{,}068...$ ($= 2{,}25\pi$) (cm^3) 1
- De vergelijking $\frac{4}{3}\pi(10a + 1{,}5)^3 = 7{,}068...$ moet worden opgelost 1
- De oplossing van deze vergelijking is $a = -0{,}0309...$ 1
- $-0{,}0309... \cdot t + 1{,}5 = 0$ geeft $t = 48{,}47...$, dus het gevraagde antwoord is 49 (minuten) 1

of

- (Na 10 minuten geldt:) $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3$ 1
- Beschrijven hoe hieruit de waarde van r berekend kan worden 1
- $r = 1{,}190...$ (cm) 1
- r neemt in 10 minuten af met 0,309… (cm), dus 0,0309… cm per minuut 1
- $\frac{1{,}5}{0{,}0309...} = 48{,}47...$, dus het gevraagde antwoord is 49 (minuten) 1

Constante verhouding

6 **maximumscore 4**

- $f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x) = x - x\ln(ax) + x - x\ln(\frac{1}{a}x) = 2x - x(\ln(ax) + \ln(\frac{1}{a}x))$ 1
- $\ln(ax) + \ln(\frac{1}{a}x) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$ 2
- Dus $\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = \dfrac{2x - x \cdot 2\ln(x)}{2} = x - x\ln(x)\ \ (= f_1(x))$ 1

of

- $f_a(x) = x - x\ln(ax) = x - x\ln(a) - x\ln(x)$ 1
- $f_{\frac{1}{a}}(x) = x - x\ln(\frac{1}{a}x) = x + x\ln(a) - x\ln(x)$ 2
- Dus $\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = \dfrac{2x - 2x\ln(x)}{2} = x - x\ln(x)\ \ (= f_1(x))$ 1

7 **maximumscore 7**

- $x - x\ln(ax) = 0$ geeft $\ln(ax) = 1$ 1
- Dit geeft $ax = \mathrm{e}$ dus $x_S = \frac{\mathrm{e}}{a}$ 1
- $f_a'(x) = 1 - (\ln(ax) + x \cdot \dfrac{a}{ax})$ 2
- $f_a'(x) = 1 - \ln(ax) - 1 = -\ln(ax) = 0$ 1
- Dit geeft $ax = 1$, dus $x_T = \frac{1}{a}$ 1
- Dit geeft: $\dfrac{x_S}{x_T} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}}{a}}{\frac{1}{a}} = \mathrm{e}$ (en dus is de verhouding $\dfrac{x_S}{x_T}$ constant) 1

Opmerking
Als de product- en/of kettingregel niet of onjuist is toegepast, voor deze vraag maximaal 5 scorepunten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores

Gekanteld vierkant

8 maximumscore 5

- Omdat $\angle PBC = 90^\circ$ is PC een middellijn van de cirkel (Thales) — 2
- Het middelpunt M is het midden van lijnstuk PC dus $M(-1, -\frac{1}{2})$ — 1
- De straal is $\frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{85}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) $(= 4{,}609...)$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- Omdat $\angle PBC = 90^\circ$ is PC een middellijn van de cirkel (Thales) — 2
- Het middelpunt M is het midden van lijnstuk PC dus $M(-1, -\frac{1}{2})$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = r^2$ — 1
- Invullen van de coördinaten van P, B of C geeft $r^2 = 21\frac{1}{4}$, dus een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- De middelloodlijn van lijnstuk BC heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x - 1$ (of vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) — 1
- De middelloodlijn van lijnstuk PB heeft vergelijking $y = 2x + 1\frac{1}{2}$ (of vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$) — 1
- Berekenen van het snijpunt van de middelloodlijnen geeft middelpunt $M(-1, -\frac{1}{2})$ — 1
- De straal is $CM\ (= BM = PM) = \sqrt{21\frac{1}{4}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) $(= 4{,}609...)$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Een vergelijking van de cirkel (met middelpunt (a, b) en straal r) is $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ — 1
- Invullen van de coördinaten van de punten B, C en P geeft $a^2+(4-b)^2=r^2$, $(-4-a)^2+(-4-b)^2=r^2$ en $(2-a)^2+(3-b)^2=r^2$ — 1
- Beschrijven hoe dit stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden opgelost kan worden — 1
- $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$ en $r=\sqrt{21{,}25}$ $(=4{,}609...)$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=21{,}25$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

9 maximumscore 5

- De lijn door P en D heeft vergelijking $y=-5\frac{1}{2}x+14$ — 1
- De lijn door C loodrecht op de lijn door P en D heeft vergelijking $y=\frac{2}{11}(x+4)-4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1
- Snijden van de twee lijnen geeft de vergelijking $\frac{2}{11}(x+4)-4=-5\frac{1}{2}x+14$ — 1
- Dit geeft $x=3\frac{1}{25}$ — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

of

- De lijn door P en D heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{CQ}=\begin{pmatrix}6+2t\\7-11t\end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{CQ}\perp\overrightarrow{PD}$ geeft $\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6+2t\\7-11t\end{pmatrix}=0$ — 1
- Dit geeft $t=\frac{13}{25}$ — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Omdat $\angle PQC = 90^\circ$ is PC een middellijn van de cirkel (Thales), dus ligt Q op de cirkel door P, B en C met vergelijking $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ — 1
- De lijn door P en D heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$ — 1
- $(2t+3)^2 + (-11t + 3\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ geeft $125t^2 - 65t = 0$ — 1
- Dit geeft $t = \frac{13}{25}$ ($t = 0$ voldoet niet) — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

of

- Omdat $\angle PQC = 90^\circ$ is PC een middellijn van de cirkel (Thales), dus ligt Q op de cirkel door P, B en C met vergelijking $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ — 1
- De lijn door P en D heeft vergelijking $y = -5\frac{1}{2}x + 14$ — 1
- $(x+1)^2 + (-5\frac{1}{2}x + 14\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ geeft $31\frac{1}{4}x^2 - 157\frac{1}{2}x + 190 = 0$ — 1
- Dit geeft (bijvoorbeeld met de abc-formule) $x = 3\frac{1}{25}$ ($x = 2$ voldoet niet) — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

of

- De lijn door P en D heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$ — 1
- Dus Q heeft coördinaten $(2+2t, 3-11t)$ — 1
- $CP^2 = CQ^2 + PQ^2$ geeft $6^2 + 7^2 = (6+2t)^2 + (7-11t)^2 + (2t)^2 + (-11t)^2$ — 1
- Dit geeft $t = \frac{13}{25}$ ($t = 0$ voldoet niet) — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

10 **maximumscore 5**

- De hoogte van driehoek CDQ, met basis CD, moet $\frac{2}{3}$ deel zijn van de zijde van het vierkant — 1
- Dus $DQ : PQ = 2 : 1$ — 1
- ($\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{DP}$ geeft) $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$ — 2
- Het antwoord $Q(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$ — 1

Anderhalf keer zo groot

11 maximumscore 8

- $f'(x) = 2x$, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $2p$ — 1
- Een vergelijking van de raaklijn is $y = 2p(x - p) + p^2$ (of een vergelijkbare uitdrukking) — 1
- Hieruit volgt dat de x-coördinaat van A gelijk is aan $\frac{1}{2}p$ — 1
- De oppervlakte van driehoek OAP is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$ — 1
- Een vergelijking van de lijn door O en P is $y = px$ — 1
- De oppervlakte van V is $\int_0^p \left(px - x^2\right) \mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $px - x^2$ is $\frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{3}x^3$ — 1
- De oppervlakte van V is $\frac{1}{6}p^3$, dus de oppervlakte van driehoek OAP is anderhalf keer zo groot als de oppervlakte van V — 1

of

- De oppervlakte van driehoek OPP', met $P'(p, 0)$, is $\frac{1}{2} \cdot p \cdot p^2 = \frac{1}{2}p^3$ — 1
- De oppervlakte van V is $\frac{1}{2}p^3 - \int_0^p x^2 \, \mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van x^2 is $\frac{1}{3}x^3$ — 1
- De oppervlakte van V is $\frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3$ — 1
- $f'(x) = 2x$, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $2p$ — 1
- $\frac{P'P}{AP'} = 2p$, dus $\frac{p^2}{AP'} = 2p$ — 1
- Hieruit volgt $AP' = \frac{p^2}{2p} = \frac{1}{2}p$, dus $OA = OP' - AP' = p - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$ — 1
- De oppervlakte van driehoek OAP is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$, dus de oppervlakte van driehoek OAP is anderhalf keer zo groot als de oppervlakte van V — 1

Een baan

12 maximumscore 3

- $\cos(\pi-a)\sin(2(\pi-a))=\cos(\pi-a)\sin(2\pi-2a)=\cos(\pi-a)\cdot-\sin(2a)$ 1
- $\cos(\pi-a)\cdot-\sin(2a)=-\cos(a)\cdot-\sin(2a)=\cos(a)\cdot\sin(2a)$ 1
- Dus de x-coördinaat van $P_{\pi-a}$ is gelijk aan de x-coördinaat van P_a (dus de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ is verticaal) 1

of

- De lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ is verticaal als de x-coördinaten van P_a en $P_{\pi-a}$ gelijk zijn 1
- Er moet dus gelden dat $\cos(\pi-a)\sin(2(\pi-a))=\cos(a)\sin(2a)$ 1
- $-\cos(a)\cdot-\sin(2a)=\cos(a)\cdot\sin(2a)$ en dus bevinden beide punten zich recht boven elkaar, waarmee het gestelde bewezen is 1

of

- Er moet bewezen worden dat $\cos(\pi-a)\sin(2(\pi-a))=\cos(a)\sin(2a)$ 1
- $\sin(2(\pi-a))=\sin(2\pi-2a)=-\sin(2a)$ 1
- Omdat $\cos(\pi-a)=-\cos(a)$ geldt nu $\cos(\pi-a)\cdot\sin(2(\pi-a))=-\cos(a)\cdot-\sin(2a)=\cos(a)\cdot\sin(2a)$ en dus bevinden beide punten zich recht boven elkaar, waarmee het gestelde bewezen is 1

13 maximumscore 5

- Er moet gelden $2\cdot|x(t)|=|y(t)|$ 1
- $2\cdot|\cos(t)\sin(2t)|=|\cos(t)|$ geeft $\cos(t)=0$ of $|\sin(2t)|=\frac{1}{2}$ 1
- $\cos(t)=0$ geeft $t=\frac{1}{2}\pi$ of $t=1\frac{1}{2}\pi$ (en deze laten we buiten beschouwing) 1
- $|\sin(2t)|=\frac{1}{2}$ geeft $2t=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\pi$ of $2t=\frac{5}{6}\pi+k\cdot\pi$ 1
- De oplossing $t=\frac{11}{12}\pi$ 1

Opmerkingen

- *Als gerekend is met* $|x(t)|=2\cdot|y(t)|$ *voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.*
- *Als gerekend is met* $y(t)=2\cdot x(t)$ *voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.*
- *Als gerekend is met* $x(t)=2\cdot y(t)$ *voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.*

14 **maximumscore 5**

- Er geldt voor $t = \frac{3}{4}\pi$: $\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi\right) \\ \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 1
- $x'(t) = -\sin(t)\sin(2t) + \cos(t)\cdot 2\cos(2t)$ 2
- $y'(t) = -\sin(t)$ 1
- Er geldt voor $t = \frac{3}{4}\pi$:
  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (en dus zijn $\overrightarrow{OP_t}$ en $\vec{v}$ gelijk) 1

Opmerking
Als de product- en/of kettingregel niet of onjuist is toegepast, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.

Buiten een vierkant

15 maximumscore 5

- Een vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ 1
- De lijn door A en C heeft vergelijking $y=4-x$ 1
- De cirkel snijden met deze lijn geeft $x^2-5x+4=0$ 1
- Dan volgt $(x-1)(x-4)=0$ dus de x-coördinaat van F is 1 (want $x=4$ geeft punt A) 1
- $F(1, 3)$ en omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ (of: omdat F op CS ligt en $x_F=1=\frac{0+2}{2}=\frac{x_C+x_S}{2}$) is F het midden van CS 1

of

- (Omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ geldt:) het midden van CS is het punt $(1, 3)$ 1
- De afstand tussen $(1, 3)$ en $(3, 2)$ is $\sqrt{5}$ 1
- Ook geldt $MA(=MB)=\sqrt{5}$ 1
- Dus $(1, 3)$ ligt op de gegeven cirkel 1
- Dus is F het midden van CS 1

of

- (Omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ geldt:) het midden van CS is het punt $(1, 3)$ 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ 1
- De lijn door A en C heeft vergelijking $y=4-x$ 1
- Omdat $(1-3)^2+(3-2)^2=5$ ligt $(1, 3)$ op de cirkel 1
- Omdat $3=4-1$ ligt $(1, 3)$ op de lijn door A en C (en dus is F het midden van CS) 1

Vraag	Antwoord	Scores

16 maximumscore 3

- $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ dus $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) = 90°$ — 1
- $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ dus $\angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90°$ — 1
- $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90° + 90° = 180°$ (of: cirkelsector BMF is een kwart cirkel en cirkelsector GMA is een kwart cirkel), dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel — 1

of

- $\text{rc}_{MB} = 2$ en $\text{rc}_{FM} = -\frac{1}{2}$ dus $\text{rc}_{MB} \cdot \text{rc}_{FM} = -1$ en dus $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MF}$ — 1
- $\text{rc}_{MA} = -2$ en $\text{rc}_{GM} = \frac{1}{2}$ dus $\text{rc}_{MA} \cdot \text{rc}_{GM} = -1$ en dus $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MG}$ — 1
- Dan volgt: cirkelsector BMF is een kwart cirkel en cirkelsector GMA is een kwart cirkel (of: $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90° + 90° = 180°$), dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel — 1

of

- $\cos(\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG})) = \dfrac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{3}{5}$ — 1
- $\cos(\angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = -\dfrac{3}{5}$ — 1
- $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$, dus $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG}) + \angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 180°$, dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel — 1

Opmerking
Wanneer de hoeken zijn benaderd voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.